

Лекция 14. Принципы построения математических моделей

1. Линейное и нелинейное программирование.
2. Дифференциальные уравнения в моделях.
3. Численное интегрирование в моделях.
4. Вероятностные модели.
5. Теория мишени.
6. Матричная модель.
7. Предсказание возрастной структуры популяции. Матрицы Лесли.
8. Марковские модели.
9. Многомерные модели.

1. Линейное и нелинейное программирование

Линейное программирование применяется, если при увеличении или уменьшении аргумента X пропорционально изменяется функция Y . Линейная функция — функция вида $Y = kX + b$. Основное свойство линейных функций: приращение функции пропорционально приращению аргумента. Графиком линейной функции является прямая линия, с чем и связано её название.

Сфера использования линейного программирования предполагает линейность целевой функции и ограничений. То есть предполагается пропорциональная зависимость между величинами: например, два трактора сделают вдвое больше работы, чем один, а в двух килограммах сена содержится в два раза больше питательных веществ, чем в одном, и т.д.

Линейное программирование является составной частью более общего метода — математического программирования. Математическое программирование позволяет находить наилучшие планы распределения ограниченных ресурсов для достижения требуемой цели — решения задачи. Линейное программирование может быть использовано как один из методов оптимизации решения. Наилучший результат здесь достигается не за счет выделения дополнительных сил и средств или иных ресурсов, а за счет их рационального распределения.

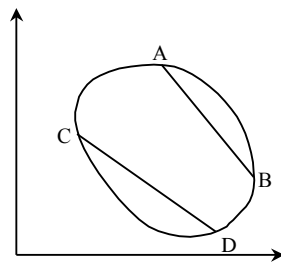
Линейная зависимость — наиболее удобная для расчетов и интерпретации, к которой исследователи стремятся свести каждую найденную закономерность, но, к сожалению, чрезвычайно редко встречающаяся в реальном мире.

Реальный мир в подавляющем большинстве случаев объективно нелинеен. В ряде случаев вид аппроксимирующего уравнения заранее предполагается из некоторых теоретических соображений. Если этого нет, то одному и тому же конечному результату будет соответствовать значительное множество вариантов расчетных формул. Возникает необходимость выбора регрессионного уравнения оптимальной сложности.

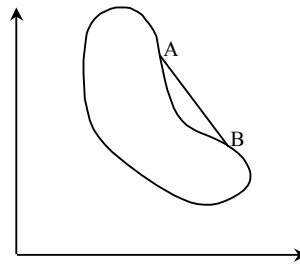
Вместе с тем, нелогично описывать простыми алгебраическими функциями динамику рядов биологических показателей, характеризующихся "горбами", перегибами и прочими нестационарными атрибутами. В этом случае сложность модели для сложных объектов принципиально необходима.

Оптимизационные задачи, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо и то и другое нелинейны, получили название задач нелинейного программирования. Для них, к сожалению, нет столь хорошо разработанных методов решения, как в линейном программировании. Поэтому точное решение удается отыскать далеко не всегда.

Для того чтобы понять, с чем это связано, прежде всего, выясним, на чём может отразиться нелинейность задачи. Если нелинейны ограничения, то область U (область допустимых решений) может оказаться невыпуклой (область называется выпуклой, если вместе с каждыми двумя точками области ей принадлежит и весь отрезок, их соединяющий (рисунки)).

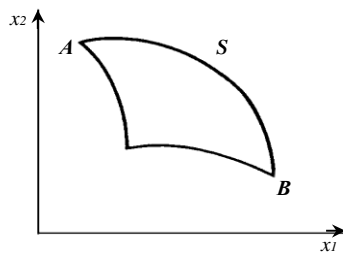


Выпуклая область (любой отрезок вместе с крайними точками целиком принадлежит области решений).

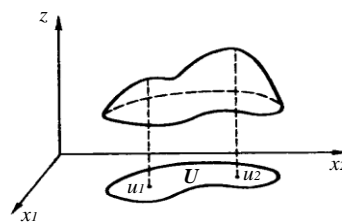


Невыпуклая область (отрезок AB не принадлежит области решений).

В задачах линейного программирования такого явления быть не могло, так как многогранник ограничений всегда выпуклый с конечным числом «крайних» точек, в которых следует искать решение. А сохраняется ли в нелинейных задачах второе из этих свойств – конечность числа «крайних» точек? Оказывается, что тоже нет. На рисунке приведен пример невыпуклой области с бесчисленным множеством «крайних» точек (каждая точка дуги ASB «крайняя»).



Невыпуклая область с бесчисленным множеством крайних точек – каждая точка дуги ASB крайняя.



Нелинейная целевая функция может иметь несколько экстремумов внутри области U . Здесь при $u=u_1$ и $u=u_2$ (обе точки внутренние) функция имеет локальные максимумы.

Не меньше неприятностей доставляет и нелинейность целевой функции. Именно из-за нее функция может достигать max или min экстремума не в «крайней» точке области U , а где-нибудь внутри, может иметь несколько локальных (местных) экстремумов, например, в точках $u=u_1$ и $u=u_2$ (точка

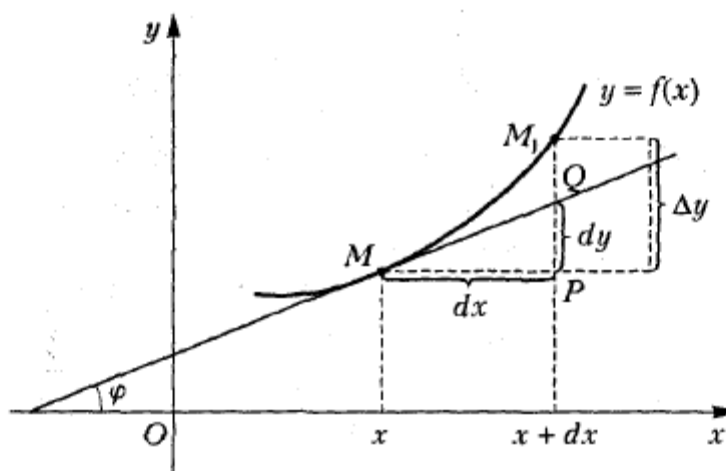
называется точкой локального экстремума, если в ней значение функции больше, чем значение этой функции в достаточно малой окрестности точки) (рисунок).

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач с нелинейной целевой функцией и (или) областью допустимых решений, определенной нелинейными ограничениями. В экономике это соответствует тому, что результаты (эффективность) возрастают или убывают непропорционально изменению масштабов использования ресурсов (или, что то же самое, масштабов производства): например, из-за деления издержек производства на переменные и условно-постоянные; из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую и т.д.

2. Дифференциальные уравнения в динамических моделях.

Пусть необходимо достичь значения K за время t , самый простой способ – иметь постоянную скорость, то есть двигаться из начальной точки в точку K прямолинейно и равномерно. Тогда график движения будет представлять собой прямую.

Реальное движение обычно не постоянно по скорости. В каждый промежуток времени скорость отличается (рисунок).



Пусть изогнутая линия MM_1 на рисунке показывает изменение скорости процесса. Чтобы находить скорость в каждый момент времени нужно двигаться точно по графику (на рисунке $y=f(x)$). Точность определения скорости будет выше, если мы раздробим время (обозначим по оси x) на малые отрезки, то есть будем двигаться к пределу $\Delta x \rightarrow 0$. График движения – кривая, тогда скорость – это касательная к реальному графику движения.

В треугольнике MPQ катеты MP и PQ представляют, соответственно, время и путь, пройденный за это время (или количество приросты биомассы, или число появившихся особей в популяции), гипотенуза MQ представляет собой скорость в виде прямой с определённым значением для

данного интервала времени. Таким образом, по теореме Пифагора можно найти приближительную скорость процесса. Оценка получается приближительной, так как кривую изменения скорости заменяли прямыми – касательными к реальному графику.

Существует процедура, позволяющая точно находить мгновенную скорость процесса – дифференцирование. Число, которое получается в результате дифференцирования – производная 1.

Рассмотрим модель роста листа, которая кроме площади поверхности и массы сырой ткани, включает в качестве переменных состояния содержание сахарозы S_u и крахмала S_t . Тогда дифференциальное уравнение для содержания сахарозы можно записать в виде:

$$\frac{dS_u}{dt} = P_g + kS_t - (S_u - C)/r$$

где k , C и r – параметры, P_g – интенсивность фотосинтеза в листе.

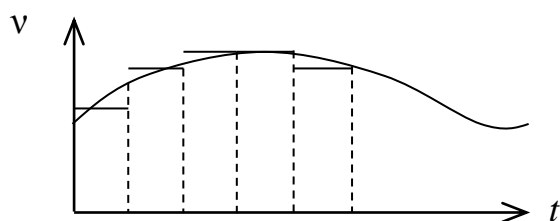
Величина P_g определяется освещенностью окружающей среды, и в зависимости от модели может быть либо константой, либо управляющей переменной. Второе слагаемое обозначает превращение крахмала в сахарозу, последнее слагаемое – выведение сахарозы из листа.

Обычно каждое из дифференциальных уравнений содержит только несколько переменных состояния, параметров и характеристик окружающей среды. Если особый интерес представляет реакция роста листа в зависимости от температуры, то в уравнение можно ввести параметр распада крахмала K и представить его зависимым от температуры.

3. Численное интегрирование в математических моделях.

Дифференциальные уравнения очень редко могут быть решены аналитически; почти всегда приходится пользоваться численными методами.

Скорость – это изменение показателя за время. Отложим на оси X время, по оси Y – скорость изменения показателя (числа особей, биомассы, пути,..). Разобьём ось X на маленькие интервалы. Кривую скорости представим как цепь разбиений с равной скоростью.



Как найти, какой путь пройден или сколько особей появилось на микроинтервале? Надо время (интервал на оси X) умножить на скорость (время * скорость = пройденный путь). Так же на втором, третьем ... микроинтервалах. На графике это равносильно нахождению площади

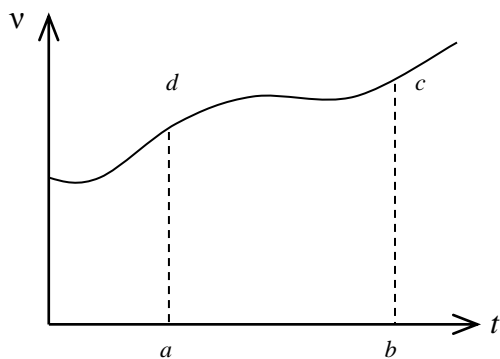
прямоугольника (длина * ширина= площадь). Сложение площадей столбиков даст нам примерную оценку: какое количество особей появилось (биомассы приросло и т.д.) за промежуток времени t .

Оценка получается примерная, так как заменяли неровные столбики на прямоугольники. Если двигаться к пределу ($\Delta t \rightarrow 0$), то погрешность уменьшается.

Площадь под кривой скорости равна пути (числу особей, биомассе), пройденному за период времени. Легко находить площадь только прямоугольника, либо фигуры, производной от него – прямоугольного треугольника.

Процедура, позволяющая определить пройденный путь по скорости и времени – интегрирование. Число – результат интегрирования – интеграл. За верхний предел интегрирования можно принимать разные моменты времени \rightarrow каждому моменту будет соответствовать свое значение пути (N).

Интегрирование – это восстановление функции по её производной (обратное действие по отношению к дифференцированию).



Площадь S криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке ab , т.е.

$S' = F(b) - F(a)$. Для любой функции f на отрезке ab

$S \rightarrow$ к некоторому числу. Это число называется интегралом функции f , т.е. $S = \int_a^b f(x) dx$.

4. Вероятностные модели

Рассмотренные выше модели были детерминистическими, то есть в них не учитывались случайные эффекты и их влияние на изучаемые процессы, например, на изменение численности популяции или прироста биомассы. Детерминистические модели не всегда служат достаточно точным отражением реальности в биологии и в других областях знаний. Это объясняется двумя причинами.

Во-первых, они предполагают большую численность популяции. Настолько большую, что можно опираться на закон больших чисел. Одно из следствий этого закона используется в генетике: при достаточно большом объеме выборки из большой популяции F_2 , полученной из F_1 ($AA \times aa \rightarrow F_1$), соотношение особей с доминантным и рецессивным проявлениями признака близко к 3:1. Это удачная детерминистическая модель – закон Менделя, который, кроме прочих предположений, требует большой объем выборки в F_2 . В реальных экспериментах, всегда ограниченных по объёму, уже по этой причине наблюдается отклонение от модели 3:1.

Теория вероятностей и основанная на ней математическая статистика предоставляют возможность использовать стохастические варианты моделей и методов. Они, в частности, позволяют ответить на вопрос: можно ли считать отклонение от детерминистической модели 3:1, обнаруженное в ограниченной выборке, чисто случайным, естественным или, всё-таки, отклонение вызвано другими генетическими причинами (отбор, миграция и т.п.). Ответ всегда дается в вероятностной форме. Например, с помощью известного критерия χ^2 можно получить вывод: с вероятностью (P) менее 0,05 (5%) обнаруженное отклонение от 3:1 вызвано случайной ошибкой выборочности. Значит отклонение в действительности вызвано какими-то особыми, неслучайными факторами.

Вторая причина, по которой необходимо применять стохастические модели, особенно в сельском хозяйстве, это необходимость учесть влияние неконтролируемых случайных колебаний условий выращивания. Часто влияние этих колебаний даже перекрывает влияние на урожай самих генотипов сравниваемых сортов. Для генетиков, селекционеров, сортоиспытателей крайне важно грамотно применять стохастические модели и методы.

Проводится n одинаковых испытаний и в каждом вероятность события B равна p , то вероятность того, что событие B ни разу не произошло равна $(1 - p)(1 - p) \dots (1 - p) = q^n$, где $q = 1 - p$. Вероятность противоположного события: «хотя бы один раз событие B произошло» равно: $1 - q^n$.

Пример 1. Оценить вероятность того, что среди 8 особей потомства F_2 от скрещивания белой (cc) и серой (CC) мыши будет хотя бы одна белая (C – доминантный аллель).

Сначала оценим вероятность того, что в F_2 не будет ни одной белой мыши. Так как доля серых мышей в F_2 составляет $\frac{3}{4}$ ($CC+Cc$), то искомая вероятность будет $(\frac{3}{4})^8 \approx 0,1$. Теперь можно определить вероятность того, что будет хотя бы одна белая: $1 - 0,1 = 0,9$. Эта вероятностная модель имеет и детерминистическую формулировку: среди большого числа семей F_2 с 8 потомками в 90% семей будет хотя бы одна белая мышь (в 10% таких семей – ни одной белой).

Пример 2. Частота спонтанной мутации - альбинизма у растений 10^{-5} . Сколько зёрен надо высадить, чтобы с вероятностью 0,95 среди них было хотя бы одно альбиносное растение?

Схема решения: $(1 - p)^n$ – вероятность того, что нет ни одного мутанта среди n растений; $1 - (1 - p)^n = 0,95$ – хотя бы одно мутантное растение есть.

Из последнего равенства при $p = 10^{-5}$ можно найти n . В данном случае оно приблизительно равно 300000.

Пример 3. Вероятность рождения мальчика и девочки равны $p = q = 1/2$. Сколько нужно планировать детей в семье, чтобы вероятность иметь хотя бы одного мальчика была более 0,9?

Схема решения: $P = (1/2)^n$ – из n детей все девочки; $1 - (1/2)^n > 0,9$ – хотя бы один мальчик. Отсюда $(1/2)^n < 0,1$. Это неравенство справедливо уже при $n = 4$.

5. Теория мишени.

В некоторых областях биологии удобно пользоваться так называемой теорией мишени. Согласно этой модели каждая клетка, организм или ген представляют собой “мишень”, а происходящие с ними изменения – результат случайных ударов (попаданий) при бомбардировке этих мишеней. Такую модель широко применяют для оценки эффективности воздействия индуцированного ионизирующего излучения на живые организмы. Эта теория естественным образом была расширена и для объяснения “спонтанных” вредных изменений, в частности изменений, связанных с процессами старения, а также действия различных факторов помимо ионизирующего излучения.

Предположим, что клетка содержит несколько мишеней (мутирующих генов) и попадание нейтрона в любую из них с известной вероятностью вызывает заметный эффект у потомства (мутацию). Какая доля из клеток популяции после облучения с определенной дозой (бомбардировка нейтронами) будет иметь хотя бы один мутантный ген и какая ни одного?

Пример 1: Половозрелое гаплоидное насекомое (например, трутень) облучается рентгеновскими лучами. Предположим, что в каждой клетке содержится N генов, каждый из которых существенен для её нормального функционирования. Как зависит от дозы доля клеток, перестающая нормально функционировать в результате облучения, то есть доля клеток с явными мутациями?

Схема решения: каждая клетка содержит N мишеней и подвергается действию дозы в k частиц. Пусть вероятность того, что определенная частица “попадет в определенную мишень” (вызовет мутацию гена), равна p . Понятно, что p очень мало. Вероятность того, что данная мишень не будет поражена данной частицей, равна $1 - p$.

Следовательно, вероятность того, что данная мишень не будет поражена ни одной из k частиц, равна $(1 - p)^k$. Если p мало, а k – велико, то удачной является следующая приближительная замена: $(1 - p)^k \approx e^{-kp}$.

6. Матричная модель.

Термин «матричные модели» применяется для обозначения прямоугольной таблицы чисел:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

В матрице важны строки и столбцы. Каждое из этих 9 чисел называется элементом матрицы. Матрица, как целое обозначается большими латинскими буквами: $A(B, C, D, \dots)$. Элементы матрицы обозначают следующим образом: a_{ij} - это элемент i -й строки, j -того столбца.

Различают разные типы матриц. Матрица с одинаковым числом строк и столбцов называется квадратной:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix};$$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{единичная};$$

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \text{нулевая};$$

$$I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \text{симметричная};$$

$$A = [1 \ 2 \ 3] - \text{вектор-строка};$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \text{вектор-столбец};$$

Записывать массивы чисел в виде матриц удобно потому, что это позволяет выполнять с ними математические действия.

Сложение или вычитание двух матриц представляет собой сложение или вычитание всех соответствующих элементов этих матриц. При умножении матрицы на число необходимо умножить число на каждый из элементов матрицы.

Необходимость сложения матриц может возникнуть, если, например, одноименную задачу решили для каждого из подразделений предприятия, а затем получили результат для предприятия в целом. Суммой матриц A и B будет матрица C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B . Действия сложения распространяются на матрицы одного порядка.

Необходимость умножения матриц может возникнуть при потребности увязать многие отрасли, когда для получения конечного продукта одной отрасли требуется продукция нескольких других. При умножении матриц A

и В получим матрицу С, в которой элемент, стоящий на пересечении строки I и столбца j, получается путем умножения элементов i–той строки матрицы А на элементы j–го столбца матрицы В и сложения полученных произведений.

7. Предсказание возрастной структуры популяции. Матрицы Лесли.

Первая матричная модель экологических систем была создана Льюисом Лесли, как детерминистическая модель, предсказывающая будущую возрастную структуру популяции самок по известной структуре в настоящий момент времени, гипотетическим коэффициентом выживания p и плодовитости f . Модель представлена матричным уравнением:

$$\begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} nt * 1 \\ nt * 2 \\ nt * 3 \\ nt * 4 \\ nt * n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nt + 1 * 0 \\ nt + 2 * 1 \\ nt + 3 * 2 \\ nt + 4 * 3 \\ nt + 5 * n \end{bmatrix};$$

Согласно этому уравнению, численность животных возрастных классов в момент времени $t+1$ можно получить, умножив численности возрастных классов в момент времени t на матрицу, элементами которой являются коэффициенты плодовитости и выживания для каждого возрастного класса.

Пусть исходная популяция состоит из одной самки старшего возраста, по окончании одного временного интервала в популяции будет уже 12 самок младшего возраста, так как:

- каждое животное старшего возраста, прежде чем умереть, успевает произвести 12 потомков;

- каждое животное среднего возраста, прежде чем перейти в следующий возрастной класс или умереть (вероятности этих событий одинаковы) дает в среднем 9 потомков;

- молодые животные с вероятностью $1/3$ попадают в среднюю группу.

Повторное применение модели, когда вектор умножают на коэффициенты плодовитости и выживания, дает следующие результаты:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 12 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [M] * \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [M] * \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [M] * \begin{bmatrix} 36 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Марковские модели

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А. Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать “динамикой вероятностей”. В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов,

теория надежности, теория массового обслуживания и т.д. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях таких наук, как механика, физика, химия и другие.

Благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений особое внимание марковские процессы приобрели у специалистов, занимающихся исследованием операций и теорией принятия оптимальных решений.

Несмотря на указанную выше простоту и наглядность, практическое применение теории марковских цепей требует знания некоторых терминов и основных положений, на которых следует остановиться.

Марковские случайные процессы относятся к частным случаям случайных процессов (СП). В свою очередь, случайные процессы основаны на понятии случайной функции (СФ).

Случайной функцией называется функция, значение которой при любом значении аргумента является случайной величиной (СВ). По-иному, СФ можно назвать функцию, которая при каждом испытании принимает какой-либо заранее неизвестный вид.

Таковыми примерами СФ являются: колебания напряжения в электрической цепи, скорость движения автомобиля на участке дороги с ограничением скорости, шероховатость поверхности детали на определенном участке и так далее.

Как правило, считают, что если аргументом СФ является время, то процесс, основанный на такой функции, называют случайным. Существует и другое, более близкое к теории принятия решений, определение СП. При этом под случайным процессом понимают процесс случайного изменения состояний какой-либо физической или технической системы по времени или какому-либо другому аргументу.

Основной конструкцией марковских моделей служит матрица, элементы которой равны вероятностям перехода системы из одного состояния в другое за определенные промежутки времени. Эта матрица, таким образом, весьма похожа на матрицы, используемые в матричных моделях, за исключением того, что суммы вероятностей по всем строкам равны 1.

Марковская модель первого порядка — это модель, в которой будущее развитие системы определяется ее текущим состоянием и не зависит от того, каким путем система пришла в это состояние. Последовательность результатов, получаемых из такой модели, часто называют марковской цепью. Применение этой модели к практическим ситуациям требует выполнения трех основных условий:

1. Система должна допускать классификацию на конечное число состояний.

2. Переходы должны происходить в дискретные моменты времени, правда, эти моменты могут быть достаточно близкими, чтобы для моделируемой системы время можно было считать непрерывным.

3. Вероятности не должны меняться со временем. Возможны и некоторые модификации этих условий, однако, ценою возрастания математической сложности модели.

Экологический смысл этих понятий схематически иллюстрируется рисунке 1, где показана типичная сукцессия; каждая стадия этой сукцессии определяется характеристиками доминирующих на данной стадии типов растений. Как показывает диаграмма, *переходным множеством состояний* является множество, каждое состояние которого может в конце концов быть достигнуто из любого другого состояния этого множества, но которое покидается навсегда, если система переходит в замкнутое множество состояний либо в поглощающее состояние.

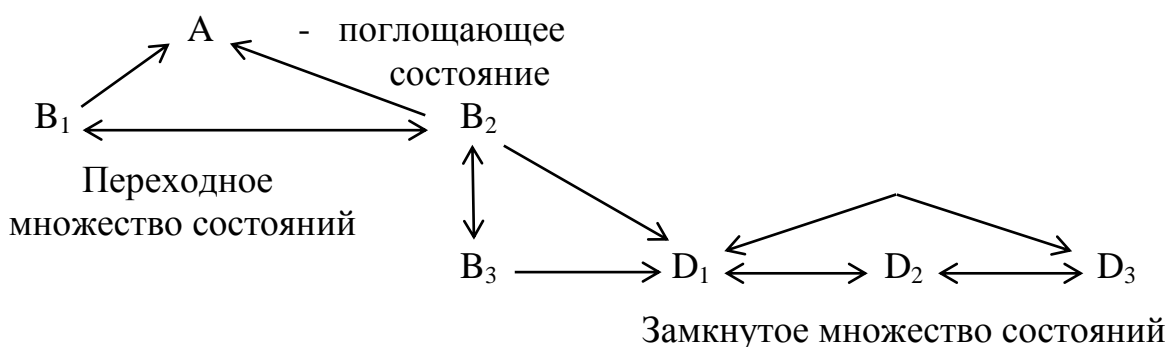


Рис. 1 Схема экологической сукцессии.

Замкнутое множество состояний отличается от переходного тем, что оно не может быть покинуто, если система перешла в одно из состояний замкнутого множества. *Поглощающим* является состояние, которое, будучи достигнуто, уже не покидается, т. е. в нем происходит полное самозамещение. Среднее время первого достижения соответствует тогда среднему времени, необходимому для наступления конкретной стадии сукцессии, а среднее время поглощения — среднему времени достижения устойчивой композиции.

Для построения моделей марковского типа необходимо следующее:

1. Некая разумная классификация состояний сукцессии по определенным категориям.
2. Данные для определения переходных вероятностей или скоростей, с которыми состояния переходят со временем из одной категории данной классификации в другую.
3. Данные о начальных условиях.

Если изучаемые системы проявляют марковские свойства из анализа модели можно получить ряд интересных и важных выводов, например:

1. Алгебраический анализ переходной матрицы выявляет существование переходных множеств состояний, замкнутых множеств состояний или поглощающих состояний. Дальнейший анализ позволяет разбить переходную матрицу на блоки, которые исследуются по отдельности, что упрощает изучение экологической системы.

2. Анализ переходной матрицы позволяет вычислить среднее время перехода от одного состояния к другому и среднюю длительность пребывания в конкретном состоянии, если оно достигается.

3. Когда существуют замкнутые или поглощающие состояния, можно вычислить вероятность пребывания в замкнутом множестве или среднее время поглощения.

Преимущества моделей марковского типа сводятся к следующему:

Такие модели довольно легко строить на основе данных по сукцессиям.

Марковские модели не требуют глубокого понимания внутренних механизмов динамических изменений в системе, но могут помочь выявить те области, где такое понимание имело бы важное значение, и, следовательно, выступают как ориентир и стимул для дальнейшего исследования.

Результаты анализа марковских моделей легко представить графически, что делает их более наглядными и понятными специалистам по управлению ресурсами.

Вычислительные процедуры при исследовании марковских моделей относительно несложные.

К недостаткам марковских моделей относят:

Отсутствие зависимости от функциональных механизмов снижает их привлекательность для экологов, склонных к функциональному подходу.

В отдельных случаях имеющихся данных недостаточно для того, чтобы достоверно оценить вероятности или скорости переходов, особенно если эти переходы происходят редко.

Трудно оценить изменения в экосистемах, охватывающие достаточно длительное время.

Рассмотрим сукцессионные изменения на верховых болотах, которые часто можно наблюдать в результате усиления дренирования. В таблице 1 приведены оценки вероятностей переходов между четырьмя возможными состояниями за период в двадцать лет. Первое состояние соответствует наиболее влажной стадии, в которой доминирует *Sphagnum*, а также представители сосудистых растений — в основном *Calluna vulgaris*, *Erica tetralix* и *Eriophorum vaginatum*. Состояние 2 отвечает более сухой стадии с ассоциацией *Calluna*, *Cladonia* и проростками *Betula* и *Pinus sylvestris*. Состояние 3 соответствует более или менее укоренившемуся лесу из *Betula* и *Pinus sylvestris*, причем для более зрелого леса типично сообщество *Vaccinium myrtillus* со мхами. Состояние 4 соответствует стадии, на которой более сухие фации спорадически выедаются крупными травоядными, в результате чего закрепляется ассоциация, где доминирует *Molinia* — *Pteridium*.

Таблица 1 - Переходные состояния сукцессионных изменений на верховом болоте

Начальное состояние	Вероятность перехода в конечное состояние			
	1	2	3	4

1. Болото	0,65	0,29	0,06	0,00
2. Сосудистые растения	0,30	0,33	0,30	0,07
3. Лес	0,00	0,28	0,69	0,03
4. Пастбище	0,00	0,40	0,20	0,40

Итак, участки, характеризующиеся вначале типичным для болота комплексом растительности, с вероятностью 0,65 остаются по прошествии 20 лет в том же состоянии и с вероятностями 0,29 и 0,06 превращаются в сообщество, где доминирует *Calluna*, и в лес соответственно. Участки, на которых вначале доминирует *Calluna*, имеют примерно равные вероятности остаться в том же состоянии, вернуться к болоту из-за флуктуации уровня грунтовых вод или превратиться в лес; с малой вероятностью (0,07) они превращаются в участки, спорадически выедаемые крупными травоядными. Лесные участки с вероятностью 0,69 сохраняются как лес, с вероятностью 0,28 из-за вымирания деревьев возвращаются к состоянию, для которого типичным является *Calluna*, и по-прежнему с малой вероятностью (0,03) превращаются в участки, спорадически выедаемые крупными травоядными. Выедаемые участки с равной вероятностью подвергаются дальнейшему выеданию или возвращаются в состояние, где доминирует *Calluna*, и с вероятностью 0,20 превращаются в лес в результате развития невыеданных проростков.

Если матрицу вероятностей переходов последовательно возводить в степень до тех пор, пока каждая ее строка станет такой же, как и все остальные, образуя некоторый фиксированный вектор вероятностей, мы получим в результате так называемую *регулярную переходную матрицу*. Эта матрица показывает, до какой степени вероятность перехода из одного состояния в другое не зависит от начального состояния, а фиксированный вектор вероятностей дает стационарное распределение вероятностей всех состояний. В нашем примере этот вектор равен

$$[0,2177 \ 0,2539 \ 0,3822 \ 0,1462].$$

Таким образом, если вероятности переходов оценены правильно и остаются постоянными, данная экосистема достигнет в конце концов состояния равновесия, в котором примерно 22% площади занято болотами и приблизительно по 25, 38 и 15% занимают сообщество *Calluna*, лес и выедаемые крупными травоядными участки соответственно.

Если, как в нашем примере, поглощающие состояния отсутствуют, нас смогут заинтересовать также средние времена первого достижения любого состояния, т. е., например, среднее время, необходимое для того, чтобы болото превратилось в участок, где доминирует *Calluna*, в лес, выедаемый травоядными участок. С другой стороны, мы можем задаться вопросом, сколько времени понадобится для того, чтобы случайно выбранный участок превращается в болото, сообщество *Calluna*, в лес или выедаемый крупными травоядными участок; для этого нам понадобится найти средние времена первого достижения в равновесии.

В результате не очень сложных вычислений мы получим следующую

матрицу средних времен первого достижения:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3,561 & 7,197 & 31,688 \\ 9,566 & 0 & 5,237 & 28,755 \\ 13,672 & 4,107 & 0 & 29,178 \\ 18,673 & 9,107 & 5,000 & 0 \end{bmatrix}$$

Поскольку каждый временной шаг равен 20 годам, среднее время, необходимое для того, чтобы участок, где преобладает *Calluna*, превратился в болото, составляет $9,566 \times 20 = 191$ г. Аналогично среднее время, необходимо для превращения леса в участок, на котором преобладала *Calluna*, составляет $4,107 \times 20 = 82$ г; таким же образом можно вычислить и все другие времена.

Наконец, зная матрицу времен и вектор вероятностей легко найти вектор средних времен первого достижения равновесия:

$$[10,385 \ 3,676 \ 3,627 \ 25,351].$$

И вновь, поскольку каждый временной шаг равен двадцати годам, среднее время, необходимое для того, чтобы случайно выбранный участок превратился в болото, составляет $10,385 \times 20 = 208$ лет, а чтобы он превратился в участок, на котором преобладает вид *Calluna*, в лес, участок, выедаемый травоядными, требуется в среднем 74 г., 73 г. и 507 лет, соответственно.

Здесь, как и во многих других математических моделях, основные свойства модели дают дополнительную информацию о поведении моделируемой системы и тем самым позволяют избежать проведения длительных экспериментов, которые в противном случае было бы необходимо поставить.

9. Многомерные модели

По количеству задействованных переменных модели подразделяют на одномерные, в которых функция определена с помощью одной переменной и многомерные модели, которые учитывают поведение более, чем одной переменной.

Все многомерные модели делят на две основные группы:

- модели, в которых одни случайные величины используются для предсказания других – прогностические модели;
- модели, где все переменные одного типа и не делается попыток предсказать одно множество значений по другому – описательные модели.

Случайная величина – величина, которая может принимать любое значение из определенного множества с какой-то определенной частотой или вероятностью.

Разработка прогностических моделей в зависимости от количества и качества включенных переменных основывается на использовании дискриминантного анализа, метода канонических величин, канонического анализа и др.

В описательных моделях с учетом того какими, количественными или качественными, являются переменные применяют метод взаимного

осреднения, анализ главных компонент, кластерный анализ и др.

В качестве примера обозначим сущность некоторых из них.

Анализ главных компонент решает следующие задачи:

1. Анализ корреляций между отдельными переменными
2. Выявление наиболее информативных переменных
3. Установление индексов вариабельности переменных и др.

В сущности, анализ главных компонент основан на построении матрицы коэффициентов корреляции между изучаемыми переменными и нахождении основных параметров матрицы.

Кластерный анализ является методом обнаружения структуры связей в сложной совокупности данных. Задача кластерного анализа заключается в объединении элементов данной системы в определенные группы-кластеры, чтобы элементы внутри одного кластера обладали высокой степенью схожести между собой, а сами кластеры достаточно отличались один от другого. Одним из вариантов представления результатов кластерного анализа является построение дендрограммы связей.

На рис. 4 показано распределение 25 почв Лейк-Дистрикта (рН, количество экстрагируемого железа). Выявляется несколько тесно связанных кластеров (например, почвы 1,8, 10 и 23, почвы 7, 17, 18 и 22 и почвы 19, 20 и 21), сливающихся через отдельные почвы в основную группу почв Лейк-Дистрикта, для которой почва 3 и в меньшей степени почва 5 не типичны. Способ, которым следует выбирать почвы для экспериментального исследования реакции платана и березы на содержание в почве питательных веществ, определяется целями этого исследования. Если нужно, чтобы группы почв были достаточно однородны, используют лишь те почвы, которые связаны на низком уровне пороговых расстояний (т.е. почвы 1, 8, 10, 23, 7, 17, 18, 22, 9, 11, 14, 6, 19, 20 и 21). Если стремятся охватить весь диапазон изменений свойств почвы, то берут лишь некоторые из почв, принадлежащих разным кластерам, почвы, более или менее от них отличающиеся, и, разумеется, почву 3.

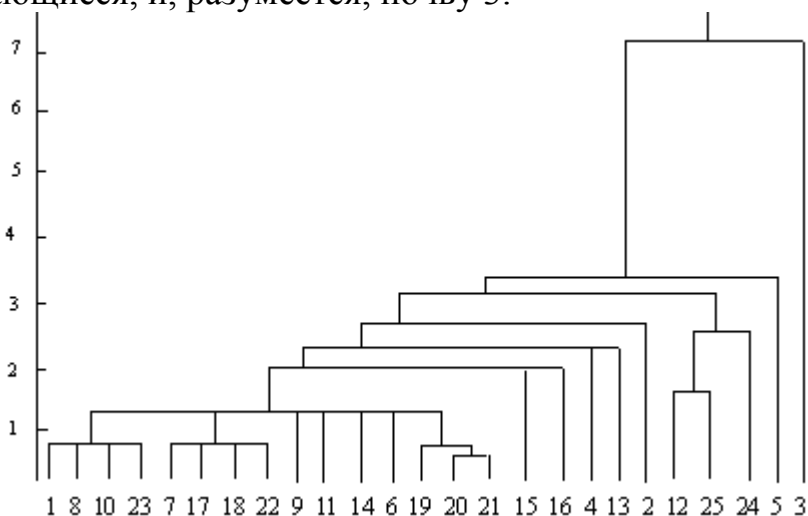


Рис. 4. Дендограмма кластерного анализа почв Лейк-Дистрикта

Другим способом построения кластерной структуры является построение так называемого «дерева минимальной протяженности». Оно представляет собой ломаную линию, соединяющую все точки набором прямолинейных отрезков, между парами переменных. Соединение должно осуществляться по следующим правилам:

1. – на линии не возникает замкнутых петель
2. – каждая точка лежит хотя бы на одной прямой
3. – отрезки являются связанными
4. – сумма длин отрезков минимальна.

На рис. 5 показан простой пример дерева с целочисленными длинами отрезков и общей длиной в 22 единицы.

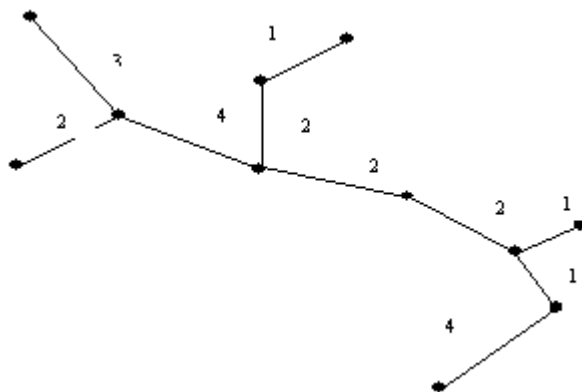


Рис. 5 Дерево минимальной протяженности с целочисленными длинами отрезков

Для описания качественных признаков используется метод взаимного осреднения. В экологии данный метод используется для описания наличия-отсутствия каких-либо переменных (индикаторные виды). В зависимости от сочетания видов-индикаторов все изучаемые выборки разбиваются на группы. В пределах каждой выборки находят средние значения параметров. Эти значения соотносят со средними значениями установленных групп и относят каждую выборку к той или иной группе. Например, при изучении распределения видов в зависимости от мощности органического слоя и кислотности почвы.

Литература:

1. Джефферс, Дж. Введение в системный анализ: применение в экологии/ Дж. Джефферс; пер. с англ. Д. О. Логофета; под ред. и с предисл. Ю. М. Свирежева. М.: Мир, 1981. – 256 с.
2. Дулепов В.И., Лескова О.А., Майоров И.С. Системная экология/ под ред. Александровой Л.И Учеб. пособие: Владивосток, 2004, 209 с.
3. Петракова Н.В. Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры / Н.В. Петракова. Брянск: Издательство Брянская ГСХА. 2011. – 162 с.
4. Франс, Дж. Математические модели в сельском хозяйстве / Дж.Франс, Дж.Торнли. М.: Агропромиздат, 1987. – 400 с.
5. Смиряев, А.В. Моделирование: от биологии до экономики: учеб. пособие для студентов специальности «селекция и генетика сельскохозяйственных

культур»/ А.В. Смиряев, А.В. Исачкин, Л.К. Харрасова. М.: Изд-во. МСХА,
2002. – 122 с.